Quelques remarques sur l'interpolation.

Par J. MARCINKIEWICZ à Wilno.

Cette note contient quelques théorèmes de la théorie de l'interpolation. L'un d'eux, à savoir le théorème 2, est connu. Il est dû à M. FABER.[1])

1. Désignons par $\{\xi_n\}$ le système de $2n+1$ points x_i, $i=0, 1, \ldots, 2n$, $0 \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$, par $U_n(\xi_n, f, x)$ le polynome trigonométrique d'ordre n défini par les $2n+1$ égalités

$$(1.1) \qquad U_n(\xi_n, f, x_i) = f(x_i)\,; \qquad i=0, 1, 2, \ldots, 2n,$$

et par $S_n(f) = S_n(f, x)$ la somme partielle d'ordre n de la série de FOURIER de la fonction f. On a le

Théorème 1. *La fonction f étant supposée intégrable au sens de Lebesgue et de période 2π, l'expression $U_n(\xi_n, g_u, x)$ où $g_u(x) = f(x+u)$, est définie pour presque chaque u et de plus, considérée comme fonction de u, elle est sommable et vérifie la relation*

$$(1.2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(\xi_n, g_u, x-u)\, du = S_n(f, x).$$

Démonstration. En vertu d'un théorème bien connu

$$(1.3) \qquad U_n(\xi_n, g_u, x-u) = \sum_{x_i \in \xi_n}{}' f(u+x_i)\, P_i(\xi_n, x-u),$$

où $P_i(\xi_n, t)$ est un polynome trigonometrique en t d'ordre n. On en obtient immédiatement la première partie du théorème. D'autre part on a

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(\xi_n, g_u, x-u)\, du &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(\xi_n, g_u - S_n(g_u), x-u)\, du + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(\xi_n, S_n(g_u), x-u)\, du = A_n + B_n. \end{aligned}$$

---

[1]) G. FABER, Über die interpolatorische Darstellung stetigen Funktionen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* **23** (1914), p. 192—210.

Or d'après (1. 3) on a

$$(1.5) \qquad A_n=\frac{1}{2\pi}\sum_{x_i\in\xi_n}\int_0^{2\pi}\{f(u+x_i)-S_n(g_u,x_i)\}P_i(\xi_n,x-u)\,du=0,$$

car les $2n+1$ premiers coefficients de $f(u+x_i)-S_n(g_u,x_i)$ sont égals à zéro. Et comme $S_n(g_u,t)$ désigne un polynome trigonométrique d'ordre n on a:

$$(1.6) \qquad S_n(g_u,x-u)=S_n(f,x)=U_n(\xi_n,S_n(g_u),x-u)$$

donc

$$(1.7) \qquad B_n=S_n(f,x).$$

Les formules (1. 4) et (1. 5) et (1. 7) donnent (1. 2).

L'idée des fonctions $g_u(x)$ est due à M. L. Fejér[2]). A savoir, pour démontrer le théorème de Faber (voir 2), M. Fejér considère les polynomes $P(u+x)$, $P(x)$ étant un polynome arbitraire d'ordre n. Remarquons encore que la démonstration du théorème de Faber proposée dans cette note ne diffère pas essentiellement de celle de M. Fejér.

Les conséquences de la formule (1. 2) seront tirées dans une autre note.

2. En appliquant la formule (1. 2) il est facile d'obtenir le

Théorème 2 (de M. Faber). *Pour chaque suite $\{\xi_n\}$ on peut choisir une fonction $f(x)$ continue de période 2π de sorte que l'on ait*

$$(2.1) \qquad \limsup_{n\to\infty}\max_{0\leq x\leq 2\pi}|U_n(\xi_n,f,x)|=\infty.$$

Démonstration. Posons

$$(2.2) \qquad L_n=L_n(\xi_n)=\max|U_n(\xi_n,f,x)|,$$

où le maximum est pris pour toutes les fonctions f, vérifiant la condition $|f|\leq 1$ et $0\leq x\leq 2\pi$. En posant dans la formule (1. 2) $x=0$ on en tire

$$(2.3) \qquad L_n\geq\max|S_n(f)|=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(n+{}^1\!/\!{}_2)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx,$$

le maximum étant pris pour toutes les fonctions soumises à l'unique

[2]) L. Fejér, Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle u. s. w., *Math. Zeitschrift*, 32 (1930), p. 426—457.

condition $|f|\leq 1$. D'après la définition du nombre L_n il existe une fonction $f_n(x)$ continue telle que l'on ait

$$(2.4) \qquad |f_n|\leq 1$$

$$(2.5) \qquad \max_{(x)}|U_n(f_n, x)|\geq \frac{1}{2}L_n\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(n+{}^1/_2)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx\to\infty.$$

D'autre part il est évident que

$$(2.6) \qquad L_n<\infty \qquad n=1, 2, \ldots$$

On prouve facilement que la fonction

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}L_{n_i}^{-1/2}f_{n_i}(x)$$

verifie la formule (2. 1) dès que la suite n_i croît assez rapidement.

Comme complément du théorème 2 nous allons prouver le

Théorème 3. *La fonction continue f étant donnée on peut choisir une suite $\{\xi_n\}$ de sorte que la suite $U_n(\xi_n, f, x)$ soit convergente uniformément vers $f(x)$.*

Démonstration. Désignons par $U_n(f, x)$ le polynome trigonométrique d'ordre n réalisant l'approximation minimum de la fonction f. D'après un théorème connu[3]) il y a $2n+2$ points x'_i, $i=0, 1, 2, \ldots, 2n+1$, $0\leq x'_0<x'_1<\ldots<x'_{2n+1}<2\pi$ dans lesquels l'écart $f-U_n(f, x)$ atteint ses valeurs extrémales en changeant le signe d'un point au suivant. Il en résulte qu'il existe au moins $2n+1$ points x_i, $i=0, 1, 2, \ldots, 2n$, $0\leq x_0<x_1<\ldots<x_{2n}<2\pi$, dans lesquels la fonction $f-U_n(\xi_n, x)$ s'annulle. Il est évident que ce système de points vérifie la thèse du théorème.

3. L'existence de la limite $U(x)=\lim\limits_{n\to\infty}U_n(\xi_n, f, x)$ et la continuité de la fonction f n'entraîne point en général l'égalité $U(x)=f(x)$. Nous allons établir à ce sujet le

Théorème 4. *Si pour un certain point y de continuité de f*

$$(3.1) \qquad \liminf_{n\to\infty} L_n \,.\, n \,.\, (y, \xi_n)=0$$

où $(y, \xi_n)=\min\limits_{x_i\in\xi_n}|y-x_i|$, et si la suite $U_n(f, y)$ converge vers $U(y)$ alors on a

$$(3.2) \qquad U(y)=f(y).$$

---

3) Voir p. ex. C. de la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* (Paris, 1919), p. 95.

Démonstration. D'après (3. 1) il existe une suite $\{n_i\}$ telle que

(3. 3) $$L_{n_i} \,.\, n_i \,.\, (y, \xi_{n_i}) \to 0.$$

En tenant compte de la définition de L_n on a

(3. 4) $$\max_{(x)} |U_n(\xi_n, f, x)| \leqq \max |f| \,.\, L_n$$

et d'après l'inégalité bien connu de M. S. BERNSTEIN

(3. 5) $$\max_{(x)} \left| \frac{d}{dx} U_n(\xi_n, f, x) \right| \leqq n \,.\, \max_{(x)} |f| \,.\, L_n.$$

Soit $|y - x_j| = (y, \xi_{n_i})$, $x_j \in \xi_{n_i}$, alors

(3. 6) $$U_{n_i}(\xi_{n_i}, f, y) = U_n(\xi_{n_i}, f, x_j) + (y - x_j) \frac{d}{dx} U_n(\xi_{n_i}, f, \theta) =$$
$$= f(x_j) + O(n_i L_{n_i} (y, \xi_{n_i})) = f(x_j) + o(1) = f(y) + o(1).$$

A titre d'application du théorème 4 considérons la suite

$$x_i = i \frac{\pi}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n-1, \quad \xi_n = (x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}).$$

On sait qu'il y a un polynome unique

$$a_0 + \sum_1^{n-1} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) + a_n \cos nx$$

vérifiant les $2n$ équations

(3. 7) $$U\left(f, i\frac{\pi}{n}\right) = f\left(\frac{i\pi}{n}\right), \qquad i = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

En désignant par L_n l'expression analogue à (2. 2), on a

(3. 8) $$L_n \leqq A \log n + B,$$

où A et B désignent deux constantes absolues. D'autre part, d'après un théorème connu de KRONECKER concernant l'approximation des nombres réels par des nombres rationels

(3. 9) $$\liminf_{n \to \infty} (x, \xi_n) \,.\, n^2 = O(1).$$

Donc

(3. 10) $$\liminf_{n \to \infty} (x, \xi_n) \,.\, n \,.\, L_n = 0.$$

En supposant l'existence de la limite $U(x) = \lim U_n(\xi_n, x)$ et la continuité de la fonction f on en deduit l'égalité $U(x) = f(x)$.

(Reçu le 6 mars 1936)